APORTACIONES MATEMÁTICAS
Memorias **52** (2017) 3–12
Artículo de Exposición

ÁLGEBRAS DE LIE REDUCTIVAS Y SEMISIMPLES; NUEVAS CARACTERIZACIONES

G. SALGADO Y C. VILLALOBOS-GUILLÉN

RESUMEN. Presentamos nuevas caracterizaciones de las álgebras de Lie semisimples y reductivas en términos de la invertibilidad de la imagen, bajo representaciones irreducibles, del operador de Casimir asociado. En otras palabras, sea $(\mathfrak{g}, B)$ un algebra de Lie cuadrática, $\mathfrak{g}$ es semisimple si, y sólo si, para toda representación irreducible la imagen bajo la representación del operador de Casimir asociado es invertible.

1. INTRODUCCIÓN

La idea de estas notas es hacer un recuento (no exhaustivo) de la teoría de las álgebras de Lie *semisimples* y *reductivas*. Toda álgebra de Lie semisimple es reductiva y hay álgebras de Lie reductivas que no son semisimples, por ejemplo, toda álgebra de Lie *abeliana* es reductiva y *no es* semisimple.

Podemos decir que la *teoría clásica* de las álgebras de Lie es el estudio de las álgebras de Lie semisimples y su *teoría de representaciones.* Sin embargo, su importancia va más allá de esto, las ideas que surgen de la clasificación de las álgebras de Lie semisimples se han extrapolado en muchos sentidos. Ahora se estudian familias de álgebras y súper álgebras de Lie en términos de *sistemas de raíces* o en términos de relaciones similares a las que se describen con la *matriz de Cartan* del álgebra de Lie.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 17B05, 17B20.

Keywords and phrases. Álgebras de Lie semisimples; álgebras de Lie reductivas; álgebras de Lie; elemento Casimir; forma de Cartan-Killing .

Por otro lado, la familia de álgebras de Lie reductivas (y por tanto las semisimples) son los primeros ejemplos de álgebras de Lie cuadráticas, por lo que se les puede asociar *un Casimir* en su álgebra universal envolvente y por lo mismo, se puede considerar la imagen del Casimir bajo una representación del álgebra. En este sentido el Prof. S. Benayadi prueba que si la imagen bajo la representación adjunta del Casimir es invertible en $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, entonces el álgebra es semisimple.

El Teorema de Weyl establece que toda representación de dimensión finita de un álgebra de Lie semisimple es completamente reducible. La estrategia para demostrar ésta afirmación es como sigue: se prueba primero que si existe un subespacio invariante de codimensión uno, entonces la representación es completamente reducible, esto es, existe un subespacio complementario invariante de dimensión uno. El caso general se reduce al caso anterior y se obtiene el resultado enunciado. Para probar el caso particular se utiliza que la imagen bajo la representación del Casimir conmuta con todos los elementos en la imagen de la representación y por tanto comparten subespacios invariantes. El complemento invariante se propone en términos de la descomposición en subespacios invariantes que se obtiene de la imagen del Casimir.

La idea de este trabajo es combinar las ideas clásicas de la demostración del Teorema de Weyl con las ideas de Benayadi para obtener nuevas caracterizaciones de las álgebras de Lie semisimples y reductivas.

2. Definiciones Básicas y el Teorema de Weyl

Sea $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ una representación *fiel* de $\mathfrak{g}$ en V, esto es, $\mathrm{Ker}(\rho) = \{0\}$. Entonces podemos definir $B_\rho\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathbb{F}$ mediante

$$B_\rho(x,y) = \mathrm{Tr}(\rho(x)\circ\rho(y)).$$

Es fácil probar que B_ρ es una función bilineal, simétrica e *invariante* en $\mathfrak{g}$, i.e., $B_\rho([x,y],z) = B_\rho(x,[y,z])$ para todos $x,y,z\in\mathfrak{g}$. Cuando B_ρ es no degenerada, para cada base $\{x_1,\dots,x_n\}$ de $\mathfrak{g}$, existe una única base $\{y_1,\dots,y_n\}$ de $\mathfrak{g}$ que satisface: $B_\rho(x_i,y_j) = \delta_i^j$. Llamaremos a la base $\{y_1,\dots,y_n\}$ la base *dual* asociada a la base $\{x_1,\dots,x_n\}$. En este caso, definimos:

$$C_\rho := C_\rho(B_\rho) = \sum_{i=1}^n \rho(x_i)\circ\rho(y_i) \in \mathfrak{gl}(V)$$

y le llamamos a C_ρ el *operador Casimir* de $\mathfrak{g}$ *asociado* a ρ y B_ρ.

En particular, podemos pensar en $\rho = \mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. La forma bilineal, simétrica e invariante que resulta se llama la forma de *Cartan-Killing* de $\mathfrak{g}$ y la denotaremos por $K_\mathfrak{g}$ en lugar de B_{ad}.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie que admite una forma bilineal, simétrica, no degenerada e invariante, $B\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{F}$. Entonces el par $(\mathfrak{g}, B)$ se llamará un álgebra de Lie *cuadrática.*

Sea $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ una representación fiel del álgebra de Lie cuadrática $(\mathfrak{g}, B)$ en V. Entonces podemos asociarle su Casimir:

$$C_\rho(B) := \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i) \circ \rho(y_i) \in \mathfrak{gl}(V).$$

Definición 2.1. Sea $(\mathfrak{g}, B)$ un álgebra de Lie cuadrática. Diremos que tiene *Casimir invertible* (con respecto a B) si para toda representación irreducible $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, se cumple que $C_\rho(B)$ es un operador invertible en $\mathfrak{gl}(V)$.

El siguiente Lema es fácil de probar.

Lema 2.2. *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie perfecta, i.e., $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, y $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ es una representación de $\mathfrak{g}$ en V, entonces $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{sl}(V)$. Más aún, si $\dim_\mathbb{F}(V) = 1$ entonces, $\rho(x) \equiv 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.*

Proposición 2.3. *Si $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple y $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ es una representación fiel de $\mathfrak{g}$ en V, entonces*

(1) *$B_\rho\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{F}$ es una métrica invariante en $\mathfrak{g}$, i.e., $(\mathfrak{g}, B_\rho)$ es un álgebra de Lie cuadrática, donde $B_\rho(x, y) = \mathrm{Tr}(\rho(x) \circ \rho(y))$,*
(2) *$\mathrm{Tr}(C_\rho(B_\rho)) = \dim_\mathbb{F} \mathfrak{g}$.*

Demostración. Sea $B_\rho\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{F}$ definida por $B_\rho(x, y) = \mathrm{Tr}(\rho(x) \circ \rho(y))$. Su radical $\mathrm{Rad}(B_\rho) = \{x \in \mathfrak{g} \mid B_\rho(x, y) = 0\ \forall y \in \mathfrak{g}\}$ es un ideal soluble en $\mathfrak{g}$, por tanto $\mathrm{Rad}(B_\rho) = \{0\}$. Ahora, se elige la base dual $\{y_i\}$ asociada a la base $\{x_i\}$, para concluir que,

$$\mathrm{Tr}(C_\rho(B_\rho)) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Tr}(\rho(x_i) \circ \rho(y_i)) = \sum_{i=1}^{n} B_\rho(x_i, y_i) = \dim_\mathbb{F} \mathfrak{g}.$$

□

Corolario 2.4. *Si además ρ es una representación irreducible de $\mathfrak{g}$ en V, entonces*

$$C_\rho(B_\rho) = \lambda\,\mathrm{Id}_V, \quad \lambda = \frac{\dim_{\mathbb{F}} \mathfrak{g}}{\dim_{\mathbb{F}} V} \neq 0.$$

Corolario 2.5. *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie simple, entonces $(\mathfrak{g}, K_{\mathfrak{g}})$ tiene Casimir invertible.*

Demostración. Sea $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ una representación irreducible de $\mathfrak{g}$ en V. Entonces $B_\rho = \mu K_{\mathfrak{g}}$, $\mu \neq 0$. Esto claramente implica que $C_\rho(K_{\mathfrak{g}})$ es invertible si y sólo si $C_\rho(B_\rho)$ es invertible ya que $\mu C_\rho(B_\rho) = C_\rho(K_{\mathfrak{g}})$. Y por el lema anterior $C_\rho(B_\rho) = \frac{\dim_{\mathbb{F}} \mathfrak{g}}{\dim_{\mathbb{F}} V}\,\mathrm{Id}_V$ □

Podemos enunciar ahora:

Teorema 2.6. *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie semisimple, entonces $(\mathfrak{g}, K_{\mathfrak{g}})$ tiene Casimir invertible.*

Demostración. Ver Prop. 2.4 (p. 100) en [5]. □

Teorema 2.7. *Si $(\mathfrak{g}, B)$ un álgebra de Lie perfecta y cuadrática con Casimir invertible con respecto a B y $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ es una representación fiel de $\mathfrak{g}$ en V, para la cual existe un subespacio invariante $W \subset V$, con $\dim_{\mathbb{F}} V = \dim_F W + 1$ y tal que $\rho|_W$ es una representación irreducible de $\mathfrak{g}$ en W, entonces ρ es completamente reducible.*

Demostración. Procederemos como en [2] (Ver §6.3, p.28).
Sea C_ρ el Casimir asociado a ρ. Entonces $C_\rho(W) \subset W$ y $\operatorname{Ker} C_\rho$ es un subespacio invariante de V. Usando ahora que $\mathfrak{g}$ es perfecta obtenemos que $\mathfrak{g}$ actúa trivialmente en V/W, por tanto C_ρ también actúa de forma trivial. De esto, se sigue que C_ρ tiene traza 0 en V/W. Por otro lado, el Lema de Schur garantiza que C_ρ actúa multiplicando por un escalar en W y este escalar no puede ser 0, ya que esto implicaria que $\mathrm{Tr}_V(C_\rho) = 0$. Por tanto, se sigue que $\operatorname{Ker} C_\rho$ es un subespacio invariante de dimensión uno de V el cual intersecta a W en $\{0\}$. □

Como una consecuencia directa obtenemos:

Teorema 2.8 (Teorema de Weyl)**.** *Si $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ es una representación del álgebra de Lie semisimple $\mathfrak{g}$ en V, entonces ρ es completamente reducible.*

3. Álgebras de Lie Semisimples

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita. Es bien conocido que $\mathfrak{g}$ puede descomponerse como $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$, donde $\mathfrak{s}$ denota una subálgebra de *Levi* de $\mathfrak{g}$, i.e., una subálgebra semisimple maximal y $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$ es el máximo ideal soluble de $\mathfrak{g}$, también llamado el *radical* de $\mathfrak{g}$.

La teoría de las álgebras de Lie semisimples es muy conocida. (Ver [1], [2], [3], [4]). Un resumen, no completo, es el siguiente Teorema.

Teorema 3.1. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión finita. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) $\mathfrak{g}$ *es semisimple (i.e.,* $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) = \{0\}$*),*
(2) *el único ideal soluble de* $\mathfrak{g}$ *es* $\{0\}$*,*
(3) *el único ideal abeliano de* $\mathfrak{g}$ *es* $\{0\}$*,*
(4) *la forma de Cartan-Killing de* $\mathfrak{g}$*,* $K_{\mathfrak{g}}$ *es no degenerada, i.e.,* $(\mathfrak{g}, K_{\mathfrak{g}})$ *es un álgebra de Lie cuadrática,*
(5) $\mathfrak{g}$ *se descompone como* $\mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_s$*, donde cada* $\mathfrak{g}_i$ *es un ideal simple de* $\mathfrak{g}$*,* $1 \leq i \leq s$*,*
(6) *si* $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ *es una representación de dimensión finita de* $\mathfrak{g}$ *en* V*, entonces* ρ *es completamente reducible,*
(7) $C_{\mathrm{ad}}(K_{\mathfrak{g}})$ *es invertible.*

4. Álgebras de Lie semisimples y su Casimir

En esta sección $\mathfrak{g}$ denotará un álgebra de Lie de dimensión finita y $K_{\mathfrak{g}}$ su forma de Cartan-Killing. El siguiente resultado es muy conocido:

Teorema 4.1. *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie y $K_{\mathfrak{g}}$ su forma de Cartan-Killing, entonces $\mathfrak{g}$ es semisimple si, y sólo si, $(\mathfrak{g}, K_{\mathfrak{g}})$ es un álgebra de Lie cuadrática.*

Más aún, en [1], S. Benayadi ha probado:

Teorema 4.2. *Si $(\mathfrak{g}, B)$ es un álgebra de Lie perfecta y cuadrática, entonces $\mathfrak{g}$ es semisimple si, y sólo si, $C_{\mathrm{ad}}(B)$ es invertible.*

Ahora, podemos enunciar el Teorema principal de ésta sección, el cual claramente es un generalización del resultado anterior.

Teorema 4.3. *Si* $(\mathfrak{g}, B)$ *es un álgebra de Lie perfecta y cuadrática con Casimir invertible con respecto a* B*, entonces* $\mathfrak{g}$ *es semisimple.*

La demostración de este Teorema se sigue de la siguiente generalización del Teorema de Weyl.

Teorema 4.4. *Si* $(\mathfrak{g}, B)$ *es un álgebra de Lie perfecta y cuadrática con Casimir invertible con respecto a* B*, entonces toda representación* $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ *de dimensión finita de* $\mathfrak{g}$ *en* V *es completamente reducible.*

Demostración. La demostración de Humphreys en [2] (p. 28) consta de dos pasos. El primero es probar el caso particular en el que la representación admite un subespacio invariante de codimensión uno y que es justamente el enunciado del Teorema 2.7. En el segundo paso se reduce el enunciado general al caso particular en el que existe un subespacio invariante de codimensión uno. En ambos casos se utiliza la propiedad establecida de que la imagen del Casimir bajo una representación irreducible es un operador invertible en la imagen de la representación. □

5. Álgebras de Lie reductivas

Ahora nos concentraremos en una clase de álgebras de Lie un poco más amplia: las álgebras de Lie *reductivas*. Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es *reductiva* si $Z(\mathfrak{g}) = \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})$. Notar que toda álgebra de Lie semisimple es un álgebra de Lie reductiva.

Estableceremos algunos resultados útiles antes de enunciar las nuevas equivalencias para las álgebras de Lie reductivas.

Sea $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$ una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$ y sea $\mathfrak{h}$ un ideal de $\mathfrak{g}$. Definamos $V_\lambda = \{w \in V \mid \forall\ h \in \mathfrak{h},\ h(w) = \lambda(h)w\}$. Entonces

Proposición 5.1. V_λ *es un subespacio invariante de* V *y* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}](V_\lambda) = 0$.

Demostración. La demostración sigue la demostración del Teorema de Lie para álgebras de Lie solubles.

Supongamos que $V_\lambda \neq \{0\}$. Notemos que V_λ es invariante bajo la acción de $\mathfrak{h}$, entonces para todo $h \in \mathfrak{h}$

$$\begin{aligned} hx(v) &= [h,x](v) + xh(v) \\ &= \lambda_{[h,x]}v + \lambda_h x(v) \end{aligned} \tag{1}$$

Basta probar que $\lambda_{[h,x]} = 0$. Definamos $W_n = \langle x^m(v)\rangle_{m=0}^n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y notemos que x manda W_k en W_{k+1}. Probaremos, usando inducción matemática, que para todo $h \in \mathfrak{h}$

$$hx^m(v) = w_h^{m-1} + \lambda_h x^m(v) \tag{2}$$

donde $w_h^{m-1} \in W_{m-1}$

- Para $m = 1$, (2) es cierto ya que (1) se cumple y $w_h^0 = \lambda_{[h,x]}v$.
- Ahora, suponemos que (2) se cumple para $m > 1$. Luego,

$$\begin{aligned} hx^{m+1}(v) &= (hx)x^m(v) \\ &= [h,x]x^m(v) + xhx^m(v) \\ &= w_{[h,x]}^{m-1} + \lambda_{[h,x]}x^m(v) + x(w_h^{m-1} + \lambda_h x^m(v)) \\ &= (\, w_{[h,x]}^{m-1} + \lambda_{[h,x]}x^m(v) + x(w_h^{m-1})\,) + \lambda_h x^{m+1}(v), \end{aligned}$$

  y entonces basta tomar w_h^m como $w_{[h,x]}^{m-1} + \lambda_{[h,x]}x^m(v) + x(w_h^{m-1})$.

Sea n el primer natural tal que $W_n = W_{n-1}$. Entonces $x(W_{n-1}) \subset W_n = W_{n-1}$ y, por (2), $\mathfrak{h}(W_{n-1}) \subset W_{n-1}$. Usando (2), obtenemos que:

$$\mathrm{Tr}(h|_{W_{n-1}}) = \lambda_h \dim W_{n-1} = \lambda_h n \tag{3}$$

Tenemos ahora que W_n es invariante bajo x y h, por tanto, $[x,h]|_{W_n} = [x|_{W_n}, h|_{W_n}]$. Para todo $h \in \mathfrak{h}$, y usando (3) y $[x|_{W_n}, h|_{W_n}] \in \mathfrak{sl}(W_n)$:

$$0 = \mathrm{Tr}([x|_{W_n}, h|_{W_n}]) = \mathrm{Tr}([x,h]|_{W_n}) = \lambda_{[x,h]}n$$

por tanto, $\lambda_{[x,h]} = 0$. □

Los siguientes resultados son bien conocidos (Ver [2], [3], [4]):

Teorema 5.2. *Sea $\mathfrak{g}$ una subalgebra de $\mathfrak{gl}(V)$ y sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Si $\mathfrak{g}$ consiste de elementos nilpotentes y $V \neq 0$, entonces existe un vector $v \in V$ diferente de cero, tal que $x(v) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.*

Teorema 5.3. *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, entonces $[\mathfrak{g}, \mathrm{Rad}(\mathfrak{g})]$ es un ideal maximal de $\mathfrak{g}$ que puede ser representado por elementos nilpotentes para toda representación de dimensión finita de $\mathfrak{g}$.*

Podemos ahora establecer el siguiente resultado.

Proposición 5.4. *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, entonces para toda representación de dimensión finita de $\mathfrak{g}$ existen subespacios invariantes $\{0\} = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_m = V$, tales que $\rho([\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}])V_i \subset V_{i-1}$ para toda $i = 1, \dots, m$.*

Demostración. La demostración es por inducción sobre $\dim V$. Si $\dim V = 1$, entonces estamos en el caso trivial. Supongamos que para toda representación $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(W)$ con $\dim W < \dim V$ la proposición es válida. Por 5.3 todo elemento de $\rho([\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}])$ es un elemento nilpotente, entonces por 5.2, existe $v \in V$, $v \neq 0$ tal que para todo $h \in [\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}]$, $\rho(h)v = 0$.

Definamos $V_1 = \{v \in V : \forall h \in [\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}]\ \rho(h)v = 0\}$. Usando 5.1 obtenemos que V_1 es un subespacio invariante y $\rho([\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}])V_1 = \{0\}$. Por tanto, si $V = V_1$ hemos terminado. Supongamos que $V \neq V_1$.

Sea W un subespacio complementario a V_1 en V, i.e., $V = V_1 \oplus W$ y sea $\pi\colon V \to W$ la proyección natural en W con $\mathrm{Ker}\,\pi = V_1$. Podemos definir una nueva representación $\rho'\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V')$ por $\rho'(x) = \pi'\rho(x)|_{V'}$, y concluir que existen subespacios invariantes (por hipótesis de inducción) $\{0\} = V'_1 \subset V'_2 \subset \cdots \subset V'_m = V'$ tales que $\rho'([\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}])V'_i \subset V'_{i-1}$ para todos $i = 2, \dots, m$.

Sea $V_i = V_1 \oplus V'_i$ y $V_0 = \{0\}$ para todo $i = 2, \dots, m$. Como antes, sea π_1 la proyección natural de V en V_1 con $\mathrm{Ker}\,\pi_1 = V'$, entonces

$$\rho(x)(v_1 + v_i) = \rho(x)v_1 + \pi_1\rho(x)v_i + \rho'(x)v_i$$

para todo $i = 2, \dots, m$, $x \in \mathfrak{g}$ and $v_1 + v_i \in V_i$. Notemos que $\rho(x)v_1, \pi_1\rho(x)v_i \in V_1$, $\rho'(x)v_i \in V'_i$ y $\rho(x)(v_1 + v_i) \in V_i$ y por tanto V_i es un subespacio invariante. Si $x \in [\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}]$, $\rho'(x)v_i \in V'_{i-1}$, entonces $\rho(x)(v_1 + v_i) \in V_{i-1}$ y $\rho([\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}])V_i \subset V_{i-1}$. □

Tenemos los siguientes corolarios:

Corolario 5.5. *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, entonces para todos $x \in \mathfrak{g}$, $y \in [\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}]$ y para toda representación de dimensión finita $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, se satisface que $\rho(x) \circ \rho(y)$ y $\rho(y)$ son transformaciones nilpotentes.*

Corolario 5.6. *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie y $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ es una representación de dimensión finita de $\mathfrak{g}$ en V, entonces $[\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}] \subset \mathrm{Rad}(B_\rho)$.*

Proposición 5.7. *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie reductiva tal que $Z(\mathfrak{g}) \neq 0$, entonces existe una representación fiel $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ de $\mathfrak{g}$ en V tal que B_ρ degenera.*

Demostración. Sea $n = \dim Z(\mathfrak{g})$, y sea $\mathfrak{s}$ una subálgebra de Levi de $\mathfrak{g}$. Sea $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ una base de $Z(\mathfrak{g})$. Definamos $V = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{F}$ donde $\mathbb{F}$ es el campo base. Definamos la transformación lineal $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g} \oplus \mathbb{F})$ como:

- $\rho(g)(f) = 0$,
- $\rho(s)(g) = [s, g]$,
- $\rho(\alpha_i)(s) = 0$,
- $\rho(\alpha_1)\alpha_j = \delta^1_j$,
- $\rho(\alpha_i)\alpha_j = \delta^i_j \alpha_i$ if $i > 1$,

para todo $s \in \mathfrak{s}$, $g \in \mathfrak{g}$, $i, j = 1, \ldots, n$ y $f \in \mathbb{F}$

Es fácil probar que ρ es una representación fiel de $\mathfrak{g}$ y que $\alpha_1 \in \mathrm{Rad}(B_\rho)$. Por tanto B_ρ degenera. □

Teorema 5.8. *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie, entonces $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie reductiva si, y sólo si, existe una representación $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ de dimensión finita tal que B_ρ es no degenerada.*

Demostración. Es bien conocido que toda álgebra de Lie reductiva admite una representación de dimensión finita ρ tal que B_ρ es no degenerada (Ver [4]).

Supongamos ahora que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie y que $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ es una representación de dimensión finita tal que B_ρ es no degenerada, entonces por 5.6 obtenemos $[\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}] \subset \mathrm{Rad}(B_\rho) = 0$. Por tanto $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) \subset Z(\mathfrak{g})$ y $\mathrm{Rad}(\mathfrak{g}) = Z(\mathfrak{g})$. □

Podemos establecer ahora: